Λύση άσκησης (από φροντ. μάθημα)

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2 \leadsto f(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-\alpha^2=0 \qquad (*)$$

$$\left(\frac{k_1}{x^3},\ \frac{k_2}{y^3},\ \frac{k_3}{z^3}\right)=F^{(\varepsilon)}$$

k_1, k_2, k_3 σταθερές

Εξισώσεις Lagrange 1ου είδους

$$F^{(\varepsilon)}+F^{(\delta)}=m\ddot{r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{x^3}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}=m\ddot{x} \Leftrightarrow \dfrac{k_1}{x^3}+2\lambda x=m\ddot{x} \\ \dfrac{k_2}{y^3}+2\lambda y=m\ddot{y} \\ \dfrac{k_3}{z^3}+2\lambda z=m\ddot{z} \end{cases}$$

$$|f(2\lambda x,2\lambda y,2\lambda z)|^2=4\lambda^2(x^2+y^2+z^2)=4\lambda^2\alpha^2$$

Παραγωγίζουμε την $(*)$ 2 φορές:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial t}=2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial t^2}=\underline{2x\ddot{x}+2y\ddot{y}+2z\ddot{z}+2\dot{x}^2+2\dot{y}^2+2\dot{z}^2}=0$$ αντικαθιστώ από το σύστημα και έχω:

$$\Leftrightarrow x\,\frac{\frac{k_1}{x^3}+2\lambda x}{m}+y\,\frac{\frac{k_2}{y^3}+2\lambda y}{m}+z\,\frac{\frac{k_3}{z^3}+2\lambda z}{m}+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{k_1}{mx^2}+\frac{2\lambda}{m}x^2+\frac{k_2}{my^2}+\frac{2\lambda}{m}y^2+\frac{k_3}{mz^2}+\frac{2\lambda}{m}z+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{k_1}{x^2}+2\lambda x^2+\frac{k_2}{y^2}+2\lambda y^2+\frac{k_3}{z^2}+2\lambda z+m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\alpha^2}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{y^2}+\frac{k_3}{z^2}\right)}_{\text{Δυναμική ενέργεια }(V)}+\underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}_{\text{Κινητική ενέργεια }(T)}=0 \Leftrightarrow$$

$E=V+T$ $\Leftrightarrow$

$$\lambda\alpha^2+V+T=0 \Leftrightarrow \lambda\alpha^2+E=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{E}{\alpha^2}$$

άρα $|f(2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z)|^2 = 4 \frac{E^2}{\alpha^4}\alpha^2 = 4\frac{E^2}{\alpha^2} \Rightarrow$

$|f| = 2\frac{E}{\alpha}$ σταθερό

Θεώρημα

Ένας δεσμός δίνεται από την εξίσωση $A dx + B dy + \Gamma dz$ είναι ολόνομος, αν η εξίσωση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί

Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας είναι:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + \Gamma\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0$$

Πχ

Να εξεταστεί αν ο δεσμός με εξίσωση

$yz(y+z)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz = 0$ είναι ολόνομος.

ΛΥΣΗ

$$(\underbrace{y^2z + yz^2}_{A})dx + (\underbrace{z^2x + zx^2}_{B}) + (\underbrace{x^2y + xy^2}_{\Gamma})dz = 0$$

$$yz(y+z)(2zx + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2xy) +$$

$$+ zx(z+x)(2xy + \cancel{y^2} - \cancel{y^2} - 2zy)$$

$$+ xy(x+y)(2yz + \cancel{z^2} - \cancel{z^2} - 2zx) = 0 \Leftrightarrow$$

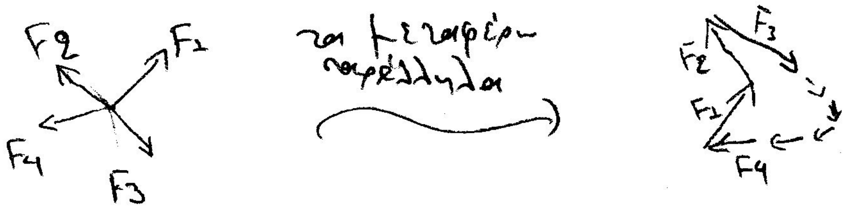
$$xyz(y+z)(z-y) + zyx(z+x)(x-z) + xyz(y+x)(y-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$xyz(\cancel{z^2} - \cancel{y^2} + \cancel{x^2} - \cancel{z^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2}) = xyz \cdot 0 = 0$$

Συνθήκες Ισορροπίας Ενός Σώματος

Ένα σώμα είναι ακίνητο $r=0 \Rightarrow F=0$
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα ισορροπούν

Γραφικά, σχηματίζουμε το δυναμοπολύγωνο να είναι κλειστό



Αναλυτικά,

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0$$
$$F_{1y} + \ldots + F_{ny} = 0$$
$$F_{1z} + \ldots + F_{nz} = 0$$

Αντίστροφα, αν η συνισταμένη δύναμη των δυνάμεων είναι μηδέν τότε το σώμα μπορεί και να μην είναι ακίνητο αλλά σύμφωνα με το 1ο αξίωμα του Νεύτωνα να κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα $[\Sigma F = m\ddot{r}]$

Ανελεύθερο σώμα (έχει δεσμό)

$$f(x,y,z,t)=0$$

Θεμελιώδης εξίσωσης κίνησης

$$m\ddot{r} = F^{(\varepsilon)} + F^{(\delta)} = F + \lambda \, \text{grand} f$$

Σώμα ηρεμεί όταν $m\ddot{r}=0$

$$0 = m\ddot{r} = F^{(\varepsilon)} + \lambda \, \text{grand} f \Leftrightarrow F^{(\varepsilon)} + \lambda \, \text{grand} f = 0$$

$$\left.\begin{aligned} F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Εξισώσεις κίνησης}$$

Άσκηση

Ένα βαρύ σώμα είναι υποχρεωμένο να κινείται στην επιφάνεια της σφαίρας $f \equiv x^2+y^2+z^2-\alpha^2=0$ υπό την επίδραση του βάρους $B=-mg\vec{z}_0$

Σε ποια θέση ισορροπεί το σώμα?

[2 θέσεις, συναρτήσει του α]